ISSN 1995-2732 (Print), 2412-9003 (Online)
УДК 621:793
DOI: 10.18503/1995-2732-2026-24-1-142-147

ОЦЕНКА СРЕДНЕЙ ПЛОЩАДИ НЕПОКРЫТИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ПОРОШКОВОМ НАПЫЛЕНИИ

Цициашвили Г.Ш.[1], Лосев А.С.[1], Часовников Д.Р.[2]

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия
[2]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Хабаровск, Россия

***Аннотация*. Постановка задачи (актуальность работы).** Процедура порошкового напыления широко используется в различных отраслях. Она позволяет в разы увеличить срок службы изделия, защить его от абразивного воздействия, повысить и улучшить функциональные свойства. Экпериментально установлено, что уменьшение размерности напыляемых частиц позволяет добиваться равномерного покрытия. Поэтому возникает необходимость в разработке соответствующих математических формул, которые позволяют моделировать процесс напыления на поверхность предельно мелких частиц. **Цель работы.** Разработать математический подход, который позволит моделировать процесс напыления на поверхность предельно мелких частиц. **Используемые методы.** Стереологическая формула для булевой модели случайного множества. Теория вероятностей, метод Монте-Карло. **Новизна.** С помощью стереологической формулы получена оценка средней площади квадрата, не покрытой круглыми частицами в ходе их напыления. **Результат.** Построена математическая модель множества точек, закрытых напыляемыми на поверхность единичного квадрата частицами сферической формы радиусом $r(m)$ при $m \to \infty$. Определена зависимость площади покрытия от радиуса напыляемых частиц и их количества при пуассоновском потоке заданной интенсивности. Получена оценка средней площади квадрата, не покрытой частицами в ходе напыления. Проведен сравнительный анализ полученной оценки с оценкой средней доли незакрытой площади квадрата, вычисленной методом Монте-Карло. **Практическая значимость.** Полученные результаты могут быть использованы при моделировании процесса напыления предельно мелких частиц на поверхность биоимплантатов. Используемая модель может быть использована для решения задачи о перколяции, а именно при определении вероятности соединения противоположных сторон квадрата через незапыленные каналы, что также является предметом исследования в технологических процессах.

Ключевые слова: порошковое напыление, метод Монте-Карло, пуассоновский поток, средняя площадь непокрытия

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-0

Для цитирования

Цициашвили Г.Ш., Лосев А.С., Часовников Д.Р. Оценка средней площади непокрытия поверхности при порошковом напылении // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. 2026. Т. 24. №1. С. 142-147. https://doi.org/10.18503/1995-2732-2026-24-1-142-147

ESTIMATION OF THE AVERAGE UNCOATED SURFACE AREA DURING POWDER SPRAYING

Tsitsiashvili G.Sh.[1], Losev A.S.[1], Chasovnikov D.R.[2]

[1] Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia
[2] Khabarovsk Branch of Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia

Abstract. **Problem Statement (Relevance).** The powder spraying is widely used in various industries. It allows to significantly increase the service life of the product, protect it from abrasive effects, and enhance its functional properties. Experimentally, it was found that reducing the size of the sprayed particles makes it possible to achieve a uniform coating. Therefore, it is necessary to develop appropriate mathematical formulas that make it possible to simulate the process of spraying extremely fine particles onto the surface. **Objectives.** The work is aimed at developing a mathematical approach that will allow simulating the process of spraying extremely fine particles onto the surface. **Methods Applied.** The authors have used a stereological formula for a Boolean model of a random set, probability theory, and Monte Carlo method. **Originality.**Using a stereological formula, an estimate of the average square area uncoated by round particles during spraying hass been obtained. **Result.** A mathematical model has been constructed of a set of points covered by spherical particles of radius sprayed onto the surface of a unit square $r(m)$ at $m\to\infty$. The dependence of the coating area on the radius of the sprayed particles and their number at a Poisson flow of a given intensity is determined. An estimate of the average square area uncoated by particles during spraying is obtained. A comparative analysis of the obtained estimate with the estimate of the average fraction of the uncoated area of the square calculated by the Monte Carlo method is carried out. **Practical Relevance.** The results obtained can be used in modeling the process of spraying extremely fine particles onto the surface of bioimplants. The model used can be applied to solve the percolation problem, namely, to determine the probability of connecting opposite sides of a square through dust-free channels, which is also a subject of research in technological processes.

Keywords: powder spraying, Monte Carlo method, Poisson flow, average uncoated area

The work was performed within the framework of the state assignment of the Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences No. 075-00459-25-00.

For citation

Tsitsiashvili G.Sh., Losev A.S., Chasovnikov D.R. Estimation of the Average Uncoated Surface Area During Powder Spraying. *Vestnik Magnitogorskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta im. G.I. Nosova* [Vestnik of Nosov Magnitogorsk State Technical University]. 2026, vol. 24, no. 1, pp. 142-147. https://doi.org/10.18503/1995-2732-2026-24-1-142-147

Введение

Обработка поверхности изделий и отдельных его деталей различными видами порошкового напыления используется для достижения необходимых свойств в их последующей эксплуатации. Известны различные методы нанесения покрытий распылением: металлизация, газопламенное и плазменное напыление [1]. Наносимое покрытие и изделие представляют собой систему, свойства которой зависят от многих факторов (материал покрытия и изделия, метод и режимы нанесения покрытия, толщина покрытия и т.д.) [2–6]. По сравнению с окрашиванием порошковое нанесение имеет ряд преимуществ, а именно оно, уменьшая количество технологических ошибок, требует сниженные энергетические затраты, допускает возможность автоматизации процесса и минимальные экологически вредные выбросы при нанесении, обеспечивает высокое качество покрытий [1].

В целом процедура защиты поверхности, например, металлического изделия за счет порошкового напыления от коррозии, абразивного воздействия и осаждения солей позволяет в разы увеличить срок его службы, что подчеркивает актуальность данного вопроса исследования как в технологическом, так и практическом плане. В другом случае, например при обработке биокопозиционных покрытий, которые используются в медицине, отдельной задачей является поиск оптимального размера напыляемых частиц. В этом случае обрабатываемая поверхность имеет большую пористость, например, биоактивные имплантаты обладают развитой морфологией поверхности и открытой пористостью (при общей пористости 35–50 %) [7]. В работах [8, 9] установлено, что уменьшение размерности напыляемых частиц за счет применения сит в этом случае позволяет получить покрытие с равномерной структурой. Но при этом данные результаты получены исключительно в ходе натурных экспериментов, что само по себе является дорогостоящим занятием. Поэтому возникает необходимость в разработке соответствующих математических формул, которые позволяют моделировать процесс напыления на поверхность предельно мелких частиц.

В настоящей работе математически моделируется процесс порошкового напыления и исследуется зависимость площади покрытия от радиуса напыляемых сферических частиц и их количества. Используется булевская модель случайного множества [10, 11], на которой рассматривается случайное множество точек, определяемое пуассоновским потоком заданной интенсивности на единичном квадрате, к которым приклеены центрами круги фиксированного радиуса. Эта, ставшая уже классической, формула продолжает использоваться в современных приложениях последних лет [12]. С помощью стереологической формулы вычисляется средняя площадь квадрата, не покрытая кругами. Производится численный анализ булевской модели случайного множества методом Монте-Карло.

Методы исследования

Рассмотрим процесс напыления конечного числа частиц сферической формы на поверхность единичного квадрата S. В работе [5] получена стереологическая формула оценки средней площади квадрата, не покрытой кругами, $S = \exp(-\lambda\pi r^2)$ при фиксированных λ, r. Эта формула нашла многочисленные практические применения, включая самые современные [7].

Рассмотри случай, когда $S = S(m)$, $m \to \infty$. Обозначим $r(m)$ радиус круга напыляемых частиц с пуассоновского потока интенсивности $\lambda(m)$, координаты центра которых имеют равномерное распределение на отрезке $[0;1]$.

Утверждение. *Если* $\lambda(m) = m\Lambda$, $r(m) = Rm^{-1/3}$, *то* $S(m) = \exp(-\Lambda m^{1/3}\pi R^2) \to 0$, $m \to \infty$. *При этом средний объем всех шаров равен* $\dfrac{4\pi\Lambda R^3}{3}$ *и не зависит от* m.

Из утверждения видно, что увеличивая m, можно добиваться устремления $S(m)$ к нулю (**рис. 1**), что может быть использовано для улучшения качества напыления в порошковой металлургии.

Замечание 1. Обобщения в этой модели возможны, если выбрать $r(m)$ в виде $r(m) = Rm^{-\gamma}$, $\gamma \le 1/3$. При этом средний объем напыляемых шаров, а значит, и средняя толщина покрытия единичного квадрата $\dfrac{4\pi\Lambda R^3 m^{1-3\gamma}}{3}$ будут увеличиваться с ростом m.

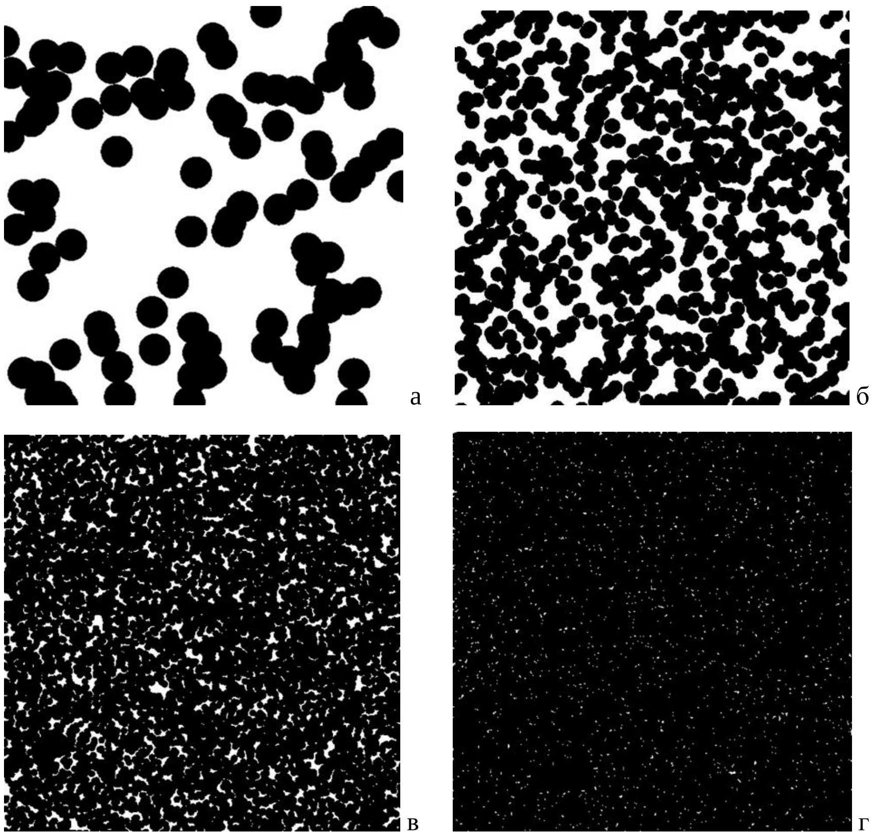

Рис. 1. Пример напыления частиц для $R = 0{,}4$: а – $m = 1$; б – $m = 10$; в – $m = 100$; г – $m = 1000$

Fig. 1. Example of particle spraying for $R = 0{,}4$ and a is m=1 б is m=10 в is m=100 г is m=1000

Полученное замечание может быть использовано для оценки средней толщины покрытия, которая является важным фактором при эксплуатации обработанного покрытия в агрессивной среде [1, 2]. Рассмотренную задачу с напылением шариков на плоский квадрат можно обобщить на одномерный случай. Положим, что на единичный отрезок помещаются точки пуассоновского потока интенсивности Λ и к каждой точке приклеивается центром отрезок длины $2R$. Тогда средняя суммарная длина S множества точек, не попавших в эти отрезки, вычисляется по формуле $S = \exp(-2\Lambda R)$.

Замечание 2. Если $\lambda(m) = m\Lambda$, $r(m) = m^{-\gamma}R$, $0 < \gamma < 1$, то $S(m) = \exp(-2m^{1-\gamma}R) \to 0$, $m \to \infty$. При этом средняя суммарная длина всех отрезков будет увеличиваться с ростом m, как $2\Lambda R m^{1-\gamma}$.

Полученные результаты и их обсуждение

Для инженерной практики необходима проверка данного утверждения с помощью численных методов (метода Монте-Карло) и сравнительного анализа $S(m)$ с оценкой $\rho(m)$ средней доли незакрытой площади квадрата S. Оценка строится путем набрасывания в квадрат K с произвольной стороной равномерно распределенных на квадрате точек, каждая из которых проверяется на принадлежность к описанным Nm кругам и определяется количество $D(m)$ этих точек, не вошедших ни в один из кругов. Тогда при $K \to \infty$ отношение $\rho(m) = D(m)K$ будет несмещенной и состоятельной оценкой средней площади множества точек, не вошедших ни в один из Nm кругов радиусом $r(m)$.

Вычислительный эксперимент заключается в следующей процедуре. На квадрат белого цвета S уже не с единичной стороной 10 см наносим Nm точек со случайными координатами $(10x; 10y)$, где x, y задаются датчиком случайных чисел с равномерным распределением на отрезке $[0,1]$. Каждая точка является центром черного круга радиусом $r(m) = Rm^{-1/3}$, характеризующего частицу напыляемого порошка. Затем методом Монте-Карло строится оценка $\rho(m)$ средней доли незакрытой площади квадрата S. Процедура повторяется при целых $m = 1, 2, \dots$ для выбранного начального радиуса R и начального количества напыляемых частиц N.

Были проведены вычислительные эксперименты для $R = 0,2,\ 0,3,\ 0,4,\ 0,6$ с начальным числом точек $N = 100$ и $\Lambda = 1$. Получена оценкой $\Delta = |S(m) - \rho(m)|$, которая для всех рассмотренных случаев $\Delta < 0,019$. Подтверждено, что при $m \to \infty$ множество Nm кругов радиусом $r(m)$ почти образует так называемый «черный квадрат» Малевича, в качестве примера представлена часть расчетов (см. **таблицу**).

Таблица. Результаты вычислений для $R = 0,2$ и $R = 0,6$

Table. Calculation results for $R = 0,2$ and $R = 0,6$

R = 0,2 см				R = 0,6 см			
m	$S(m)$	$\rho(m)$	Δ	m	$S(m)$	ρ (m)	Δ
5000	0,11662	0,12010	0,00348	1	0,32272	0,31670	0,00602
10000	0,06671	0,06570	0,00101	2	0,24052	0,25150	0,01098
15000	0,04509	0,04240	0,00269	3	0,19571	0,21450	0,01879
20000	0,03301	0,03050	0,00251	4	0,16608	0,15230	0,01378
25000	0,02536	0,02540	0,00004	5	0,14458	0,16260	0,01802
30000	0,02015	0,02160	0,00145	6	0,12808	0,14400	0,01592
35000	0,01640	0,01650	0,00010	7	0,11493	0,11720	0,00227
40000	0,01360	0,01370	0,00010	8	0,10415	0,09920	0,00495
45000	0,01145	0,01280	0,00135	9	0,09513	0,09390	0,00123
50000	0,00976	0,00840	0,00136	10	0,08746	0,09720	0,00974
55000	0,00840	0,00990	0,00150	20	0,04642	0,05230	0,00588
60000	0,00730	0,00870	0,00140	30	0,02977	0,03120	0,00143
65000	0,00639	0,00700	0,00061	40	0,02090	0,02220	0,00130
70000	0,00563	0,00570	0,00007	50	0,01551	0,01670	0,00119
75000	0,00499	0,00460	0,00039	60	0,01194	0,01110	0,00084
80000	0,00445	0,00460	0,00015	70	0,00946	0,01350	0,00404
85000	0,00398	0,00430	0,00032	80	0,00765	0,01040	0,00275
90000	0,00358	0,00360	0,00002	90	0,00629	0,00750	0,00121
95000	0,00323	0,00270	0,00053	100	0,00525	0,00580	0,00055

Заключение

Приведенные формулы и результаты вычислений показывают, что, используя булеву модель случайного множества и метод Монте-Карло, можно ставить и решать различные задачи оценки качества напыления в зависимости от размеров напыляемых частиц. Наравне с этим, полученный результат может быть использован в решении задачи о перколяции, а именно при определении вероятности соединения противоположных сторон квадрата незапыленными каналами, что вызывает отдельный интерес в исследованиях и разработках высокоточных цифровых изделий.

Список источников

1. Швецов М.В., Бикбов Г.Б., Калачев И.Ф. Преимущество порошковых покрытий для защиты НКТ // Экспозиция Нефть Газ. 2015. №5 (44). С. 37-39.
2. Нанесение порошковых покрытий детонационным методом / Максименко Е.В., Муравлев Е.В., Казанцев И.В., Ахмадеев И.Р., Ильясов С.Г. // Ползуновский вестник. 2007. №3. С. 64-67.
3. Винокуров Г.Г., Суздалов И.П., Попов О.Н. Разработка статистического подхода к описанию структуры порошковых покрытий и материалов // Физическая мезомеханика. 2004. №S2. С. 65-68.
4. Прогнозирование вероятности получения функциональных свойств порошковых покрытий / Полякова М.А., Извеков Ю.А., Самодурова М.Н., Трофимова

С.Н., Шеметова В.В., Ярушина Д.В // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. 2025. Т. 23. №1. С. 149-157.
5. Получение защитных гетерофазных покрытий методами импульсной электроискровой и ионно-плазменной обработки / Замулаева Е.И., Кудряшов А.Е., Кирюханцев-Корнеев Ф.В., Башкиров Е.А., Муканов С.К., Погожев Ю.С., Левашов Е.А. // ЭОМ. 2024. №2. С.19-30.
6. Тимохова О.М., Бурмистрова О.Н., Тимохов Р.С. Зависимость между параметрами вязкости и прочности сцепления газотермических покрытий деталей лесных машин // Resources and Technology. 2020. №4. С. 80-94.
7. LeGeros R.Z. Properties of Osteoconductive Biomaterials: Calcium Phosphates // Clinical Orthopaedics and Related Research. 2002, vol. 395, pp. 81–98.
8. Мельникова И.П., Лясникова А.В., Лясников В.Н. Улучшение функциональных характеристик биосовместимых плазмонапыленных покрытий медицинских имплантатов путем повышения равномерности их пористой и стабилизации кристаллической структур // Биотехносфера. 2012. №5-6 (23-24). С.56-61.
9. Мельникова И.П., Лясникова А.В., Лясников В.Н. Морфология частиц гидроксиапатита и ее влияние на свойства биокомпозитных плазмонапыленных покрытий // Саратовский научно-медицинский журнал. 2013. №3. С. 441-445.
10. Амбарцумян Р.В., Мекке И., Штойян Д. Введение в стохастическую геометрию. М.: Наука, 1989.
11. Stochastic Geometry and Its Applications / Chiu S.N., Stoyan D., Kendall W.S., Mecke J. New York: John Wiley and Sons, 2013.
12. Effective hyperelastic material parameters from microstructures constructed using the planar Boolean model / Brandell M., Brands D., Maike S., Rheinbach O., Schroder J., Schwarz A., Stoyan D. // Computational Mechanics. 2022, vol. 69, pp. 1295-1321.

References

1. Shvetsov M.V., Bikbov G.B., Kalachev I.F. The advantage of powder coatings for the protection of tubing. *Ekspozitsiya Neft Gaz* [Oil and Gas Exposition]. 2015;(5(44)):37-39. (In Russ.)
2. Maksimenko E.V., Muravlev E.V., Kazantsev I.V., Akhmadeev I.R., Ilyasov S.G. Application of powder coatings by detonation method. *Polzunovskiy vestnik* [Polzunovskiy vestnik]. 2007;(3):64-67. (In Russ.)
3. Vinokurov G.G., Suzdalov I.P., Popov O.N. Razrabotka Development of a statistical approach to describing the structure of powder coatings and materials. Mesomech. *Fizicheskaya mezomekhanika* [Physical mesomechanics]. 2004;(S2):65-68. (In Russ.)
4. Polyakova M.A., Izvekov Yu.A., Samodurova M.N., Trofimova S.N., Shemetova V.V., Yarushina D.V. Forecasting the probability of obtaining functional properties of powder coatings. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. G.I. Nosova* [Vestnik of Nosov Magnitogorsk State Technical University]. 2025;23(1):149-157. (In Russ.)
5. Zamulaeva E.I., Kudryashov A.E., Kiryukhantsev-Korneev F.V., Bashkirov E.A., Mukanov S.K., Pogozhev Yu.S., Levashov E.A. Obtaining protective heterophase coatings by pulsed electric spark and ion plasma treatment methods. *Elektronnaya obrabotka materialov* [Electronic Processing of Materials]. 2024;(2):19-30. (In Russ.)
6. Timokhova O.M., Burmistrova O.N., Timokhov R.S. Dependence between the parameters of viscosity and adhesion strength of gas-thermal coatings of forest machinery parts. *Resources and Technology* [Resources and Technology]. 2020;(4):80-94. (In Russ.)
7. Le Geros R.Z. Properties of Osteoconductive Biomaterials: Calcium Phosphates. Clinical Orthopaedics and Related Research. 2002;395:81-98.
8. Melnikova I.P., Lyasnikova A.V., Lyasnikov V.N. Improving the functional characteristics of biocompatible plasma-coated coatings of medical implants by increasing the uniformity of their porous and stabilizing crystal structures. *Biotekhnosfera* [Biotechnosphere]. 2012;(5-6(23-24)):56-61. (In Russ.)
9. Melnikova I.P., Lyasnikova A.V., Lyasnikov V.N. Morphology of hydroxyapatite particles and its influence on the properties of biocomposite plasma-sprayed coatings. *Saratovskiy nauchno-meditsinskiy zhurnal* [Saratov Scientific Medical Journal]. 2013;(3):441-445. (In Russ.)
10. Ambartsumyan R.V., Mekke I., Shtoyan D. *Vvedenie v stokhasticheskuyu geometriyu* [Introduction to Stochastic Geometry]. Moscow: Nauka, 1989. (In Russ.)
11. Chiu S.N., Stoyan, D., Kendall, W.S., Mecke, J. Stochastic Geometry and Its Applications. New York: John Wiley and Sons, 2013.
12. Brandell M., Brands D., Maike S., Rheinbach O., Schroder J., Schwarz A., Stoyan D. Effective hyperelastic material parameters from microstructures constructed using the planar Boolean model. Computational Mechanics. 2022;69:1295-1321.

Поступила 01.08.2025; принята к публикации 07.10.2025; опубликована 31.03.2026
Submitted 01/08/2025; revised 07/10/2025; published 31/03/2026

Цициашвили Гурами Шалвович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник,
Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия.
Email: guram@iam.dvo.ru. ORCID 0000-0003-2600-0474.

Лосев Александр Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, и.о. руководителя,
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Хабаровск, Россия.
Email: A.S.Losev@yandex.ru. ORCID 0000-0002-5888-3737

Часовников Даниил Родионович – лаборант,
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Хабаровск, Россия.
Email: chdanil14052004@gmail.com

Gurami Sh. Tsitsiashvili – DrSc (Eng.), Professor, Chief Researcher,
Institute of Applied Mathrematics, the Far Eastern Branch of Russian Scademy sciences. Vladivostok, Russia.
Email: guram@iam.dvo.ru ORCID 0000-0003-2600-0474.

Alexander S. Losev – PhD (Eng.), Associate Professor, Acting Head,
Khabarovsk Branch of Institute of Applied Mathrematics the Far Eastern Branch of Russian Scademy sciences, Vladivostok, Russia.
Email: A.S.Losev@yandex.ru. ORCID 0000-0002-5888-3737.

Daniel R. Chasovnikov – Laboratory Assistant,
Khabarovsk Branch of Institute of Applied Mathrematics the Far Eastern Branch of Russian Scademy sciences, Vladivostok, Russia.
Email: chdanil14052004@gmail.com