НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ОБОРУДОВАНИЕ

УДК 681.513

ИССЛЕДОВАНИЕ СТЕПЕНИ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Неусыпин К.А., Пролетарский А.В., Кузнецов И.А.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. Рассмотрены подходы к решению задачи определения идентифицируемости параметров линейных динамических систем. Исследованы оригинальные критерии вычисления меры идентифицируемости конкретных параметров модели динамического объекта на основе использования скалярного подхода. Эффективность критериев меры идентифицируемости продемонстрирована путем анализа качества идентификации гравитационного ускорения в моделях погрешностей инерциальной навигационной системы летательного аппарата.

Ключевые слова: модель динамического объекта, идентифицируемость, качество идентификации, критерий степени идентифицируемости.

Введение

Решение задач управления динамическими различными объектами предполагает использование математической модели исследуемого процесса. Математические модели, полученные на основе физических или каких-либо других законов, в практических приложениях, как правило, не всегда точно отражают исследуемые процессы. Поэтому для уточнения структуры и параметров математической модели применяются различные алгоритмы идентификации [1–3] и алгоритмы построения моделей. Алгоритмы параметрической идентификации позволяют определить отдельные параметры матрицы модели, которая задана априори. В качестве алгоритмов построения моделей часто используются алгоритмы самоорганизации, нейронные сети и генетические алгоритмы.

В процессе функционирования динамического объекта в меняющихся условиях некоторые параметры моделей могут существенно изменяться, поэтому их необходимо определять с помощью алгоритмов идентификации. Точность определения параметров модели зависит от свойств матрицы модели и точности алгоритма идентификации. Выбор используемого алгоритма идентификации определяется из соображений возможностей реализации в имеющемся вычислителе и особенностей проектируемого объекта. Точностные характеристики наиболее популярных алгоритмов идентификации известны. Исследование конкретных моделей на предмет качества идентификации параметров проводились опытным путем, и в общем случае применение такого подхода требует проведения серии сложных дорогостоящих экспериментов.

Другим способом решения задачи определения качества идентификации является аналитический подход – разработка критерия меры или степени идентифицируемости. В открытых публикациях информация о численных критериях степени идентифицируемости отсутствует. Иисследуем задачу принципиальной возможности идентификации, а затем перейдем к рассмотрению вопроса качества (эффективности) идентификации.

Критерии идентифицируемости. Параметрическая идентифицируемость представляет собой возможность определения параметров математической модели системы по результатам измерения определённых выходных величин в течение некоторого интервала времени. Параметры, вектор которых в дальнейшем обозначается через **a**, отличается от координат (вектор **x**) скоростью изменения. Параметры считаются медленно изменяющимися величинами, а в идеальном случае постоянными $(\dot{a}=0)$.

В соответствие с этим для задачи параметрической идентифицируемости непрерывного процесса уравнения записываются в виде

$$\dot{x}=f(x,u,a,t);$$
$$\dot{a}=0;$$
$$z=h(x,u,a,t).$$

Функция u = u(t) в задаче идентифицируемости считается известной (точно измеряемой). Что касается вектора состояния **x** = x(t), то он может считаться либо неизвестным (подлежащим определению по наблюдению той же векторной величины **z**), либо непосредственно точно измеряемым. Данное условие относится к случаю, когда должно определяться условие наблюдаемости как **x**, так и **a**, что и является условием идентифицируемости.

Известны различные способы определения меры (степени) идентифицируемости или условия определимости.

Способ, предложенный Н.А. Балониным [1], позволяет определить принципиальную возможность осуществления процедуры идентификации.

Модель линейной однородной системы имеет вид

$$\dot{x}=Ax,$$

где вектор состояния $x\in R^n, x_0=x(0)$.

Линейная однородная система называется полность идентифициремой по вектору состояния, если при заданном векторе, начальных условиях x_0 матрица параметров A может быть однозначно восстановлена за конечный отрезок времени идентификации по одной временной последовательности x=x(t). Иначе, пара (A,x_0) полностью идентифицируема или идентифицируема вполне, когда множество пар $(A\_,x_0)$, объединенных общностью интегральной кривой x=x(t), x_0=x(0), вырождается в точку A_=A. В противном случае пара неидентифицируема.

Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары (A,x_0) состоит в следующем

$$Rank[W_0]=Rank[x_0, Ax_0, A^2x_0,\dots,A^{n-1}x_0]=n.$$

W_0 – матрица идентифицируемости.

Данный метод предполагает определение фундаментальной возможности идентификации параметров динамической системы.

Известен метод, предложенный А.В. Балакришнаном [2], основанный на конкретном критерии идентифицируемости.

Задана линейная модель сигнала:

$$\begin{cases}\upsilon_n=Cx_n+N_n;\\ x_{n+1}=Ax_n+BU_n.\end{cases}\qquad(1)$$

B – неизвестная матрица n×p, A и C – известные матрицы n×n и m×n, U_m – входная последовательность p×1, Известна и наблюдаема дисперсия белого шума.

Пусть

$$\begin{cases}Z=\begin{vmatrix}x_0\\ B\end{vmatrix};\\ L_nZ=CA^nx_0+CK_nB.\end{cases}$$

Следовательно, $\upsilon_n=L_nZ+N_n$.

Оценка безусловного максимума правдоподобия (ОБМП) задается выражением

$$\hat{Z}_n=E[Z\mid\upsilon_1,\dots,\upsilon]=(\Lambda_{tr}^{-1}+\Re_n)^{-1}\sum_1^n L_k^*\upsilon_k.\quad(3)$$

$$\Re_n=\sum_1^n L_k^*L_k=\begin{bmatrix}\sum_1^n A^{*k}C^*CA^k & \sum_1^n A^{*j}C^*CK_j\\ \sum_1^n K_j^*C^*CA^j & \sum_1^n K_j^*C^*CK_j\end{bmatrix}.$$

ОБМП является асимптотически эффективной оценкой. Качество таких оценок асимптотически не зависит от начальных дисперсий.

Для оценки (3) нужно использовать все имеющиеся данные и, кроме того, дополнительная трудность состоит в необходимости оценивания начального состояния. Теперь построим оценку, которая является последовательной, или «текущей», и которая не использует какую-либо оценку состояния. Для этой цели необходимо предположить, что выполнено следующее «условие определимости».

Условие определимости (критерий идентифицируемости) заключается в том, что предел

$\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{1}^{N}K_n^*C_n^*CK_n$ существует и невырожден.

Условие определимости также накладывает ограничение на входную последовательность, то есть при выполнении условия определимости (и устойчивости матрицы A) ковариационная матрица погрешности $E[(B-\hat{B}_n)(B-\hat{B}_n)^*]\to 0$ при $n\to\infty$.

Вычисление идентифицируемости по данной методике предполагает сложные математические вычисления, поэтому практическое применение его затруднительно.

Другой известный способ предполагает использование критерия идентифицируемости, предложенного С.А. Айвазяном [3].

Рассмотрим некоторые наиболее важные типы ограничений. Предполагается, что априорные ограничения являются линейными однородными функциями, коэффициенты матрицы **A** могут быть однозначно восстановлены по матрице приведенной формы **П**.

Пусть I_k – единичная матрица порядка KxK.

Введем обозначение $W=\begin{bmatrix}\Pi\\ I_k\end{bmatrix}$.

Соотношение ВП+Г=0 между структурной и приведенной формой теперь может быть записано в виде AW=0.

A – матрица порядка Gx(GxK); W – матрица порядка (G+K)xK. Имеющая ранг K.

Пусть $\alpha_1\Phi=0$, где Ф-матрица из G+K строк, имеющая столько столбцов, сколько ограничений. Например, пусть априори известно, что коэффициент $\beta_{12}=0$. Тогда один из столбцов матрицы Ф имеет вид $(0,1,0,\ldots,0)^T$. Тогда элементы вектора α_1 являются решением системы уравнений $\alpha_1[W\Phi]=0$.

В силу правила нормализации ($\beta_{11}=0$) для идентифицируемости первого уравнения необходимо и достаточно, чтобы пространство решений системы было одномерным, т.е.

$$\mathrm{rank}[W\Phi]=G+K-1. \qquad (4)$$

Пусть L – число ограничений. Тогда [WФ] содержит K+L столбцов и для выполнения (4) необходимо, чтобы $L\geq G-1$, то есть для идентифицируемости какого-либо из уравнений необходимо, чтобы число ограничений было не меньше числа уравнений модели, уменьшенного на единицу.

Если имеются только исключающие ограничения, т.е. априорная информация о равенстве нулю некоторых коэффициентов, то необходимое условие идентифицируемости определенного уравнения таково: число неизвестных, исключенных из уравнения, должно быть по меньшей мере равно числу уравнений минус единица. Последнее может сформулировано следующим образом: число исключенных из уравнения экзогенных переменных должно быть не меньше числа участвующих в нем эндогенных переменных, уменьшенного на единицу.

Сформулированные необходимые условия (так называемые правила порядка) в силу своей простоты являются весьма полезными при решении проблемы идентифицируемости, поскольку при построении модели они позволяют сразу выявить неидентифицируемые уравнения. Однако эти условия могут оказаться далекими от достаточных. Необходимое и достаточное условие (4) не годится для проверки идентифицируемости модели, поскольку требует построения матрицы **П**. Тем не менее из него можно извлечь критерий идентифицируемости и в терминах структурной формы (правило ранга).

Первое уравнение системы идентифицируемо тогда и только тогда, когда rank(AФ)=G-1. Это утверждение может быть выведено непосредственно из (5), но его можно получить из соображений, связанных с инвариантностью коэффициентов при умножении структурной формы на допустимые матрицы.

Вышеупомянутый метод идентификации подходит, скорее, для теоретических абстрактных задач.

Способ вычисления степени идентифицируемости параметров на основе скалярного подхода [4]. Рассмотрим математическую модель исследуемого динамического объекта, которая имеет следующий вид:

$$x_k=\Phi x_{k-1}+w_{k-1}, \qquad (5)$$

где x_{k-1} – вектор состояния; w_{k-1} – вектор входного шума; **Ф** – матрица модели.

Часть вектора состояния измеряется:

$$z_k=Hx_k+v_k, \qquad (6)$$

где z_k – вектор измерений; H – матрица измерений; v_k – вектор измерительного шума.

Для определения неизвестных параметров целесообразно использовать алгоритмы оценивания [4,5], например фильтр Калмана или его прямые адаптивные модификации.

Судить о мере идентифицируемости можно по двум характеристикам: точности идентификации и времени сходимости. Критерий, по которому определяется степень идентифицируемости, имеет вид [5]

$$\gamma^i = \frac{P_o^i r}{P_o r^{*i}}, \tag{7}$$

где P_0 – дисперсия начального значения непосредственно измеряемой компоненты вектора идентифицируемых параметров а.

В случае, когда не удается точно определить начальное значение дисперсии ошибки оценивания, можно воспользоваться критерием степени идентифицируемости вида

$$\gamma^i = \frac{M\left[(a^i)^2\right]r}{M\left[(z^i)^2\right]r^{*i}}. \tag{8}$$

Здесь $M[(a^i)^2]$ – дисперсия произвольной i-й компоненты вектора параметров а; $M[(z^i)^2]$ – дисперсия непосредственно измеряемой компоненты вектора параметров; $r = M[v^2]$ – дисперсия исходного измерительного шума;

$$r^{*i}_{k} = \frac{1}{2}\sqrt{\{p_0^1 k - M[(v_k^i)^2]\}^2 + 4M[(v_k^i)^2]p_0(k-1)} - \frac{1}{2}\{p_0^i k - M[(v_k^i)^2]\}$$

– дисперсия приведенного измерительного шума.

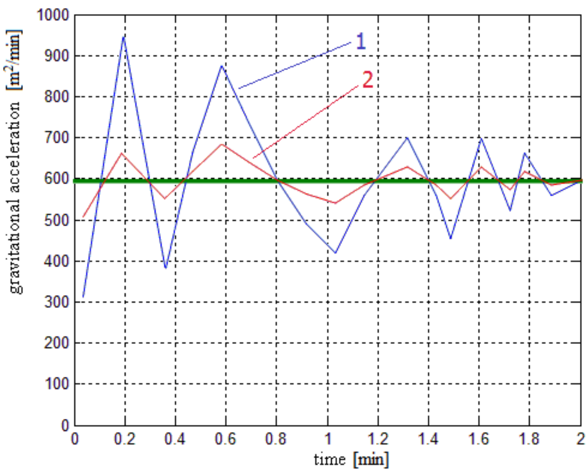
В критериях степени идентифицируемости (7) и (8) мерой качества идентификации является скаляр. Эта особенность позволяет проводить сравнение степеней идентифицируемости компонент векторов параметров матриц различных объектов.

Таким образом, формализованные зависимости (7), (8) используются для определения степени идентифицируемости параметров матрицы **Ф**. Дисперсия исходного измерительного шума определяется из практических соображений в соответствии с режимом работы измерительной системы или принимается значение из паспорта измерительного прибора. Определенные сложности возникают при вычислении приведенного измерительного шума. Однако при использовании матрицы модели исследуемой системы скалярного адаптивного алгоритма оценивания при идентификации параметров дисперсия приведенного измерительного шума вычисляется на каждом шаге функционирования алгоритма.

С помощью численных критериев можно определить качество идентификации конкретных параметров матрицы модели динамического объекта. О качестве идентификации или эффективности идентификации можно судить по двум характеристикам: точности и времени идентификации. Имеется ввиду максимально достижимая точность идентификации и необходимое время до достижения заданной точности идентификации.

Рассмотрим в качестве примера известные модели погрешностей инерциальной навигационной системы (ИНС) [4]. Определим степень идентифицируемости параметра матрицы, содержащего g – гравитационное ускорение. В процессе полета g меняется при изменении высоты полета. Поэтому априорное значение 9,8 м/с^2 требуется уточнять при изменении высоты полета ЛА.

Сначала рассмотрим модель одного горизонтального информационного канала ИНС [4]. Степень идентифицируемости g достигает значения 0,001. Затем исследуем модель, составленную для трех каналов ИНС. Эта модель включает перекрестные связи между информационными каналами [4]. В этом случае степень идентифицируемости исследуемого параметра увеличивается и составляет 0,003. В соответствии с критерием (8) эффективность идентификации g будет выше в случае использования более подробной модели. Этот результат подтверждается результатами математического моделирования.



Результаты математического моделирования скалярного алгоритма идентификации.

На **рисунке** введены следующие обозначения: 1 – оценка параметра g с помощью скалярного алгоритма идентификации с использованием модели одного канала ИНС, 2 – оценка параметра g при использовании модели трех каналов ИНС.

Как видно из графиков, точность идентификации при использовании модели погрешностей для трех каналов ИНС на 12% выше, чем точность идентификации при использовании модели погрешностей одного канала ИНС.

Заключение

Исследованные численные критерии степени идентифицируемости конкретных параметров матрицы модели динамического объекта имеют ясный физический смысл, отличаются простотой, универсальностью, позволяют вычислять качество идентификации параметров в виде скаляра и удобны при использовании в практических приложениях.

Список литературы

1. Балонин Н.А. Теоремы идентифицируемости. СПб.: Изд-во «Политехника», 2010. 48 с.
2. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана: пер.с англ. М.: Мир, 1988. 168 с.
3. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Исследование зависимостей / под ред. С. А. Айвазяна. М.: Финансы и статистика, 1985. 487 с.
4. Салычев О.С. Скалярное оценивание многомерных динамических систем. М.: Машиностроение, 1987. 216 с.
5. Неусыпин К.А., Пролетарский А.В., Кузнецов И.А. Синтез численного критерия меры идентифицируемости параметров моделей // Автоматизация. Современные технологии. 2015. №3. С. 9–13.

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

RESEARCH ON AN IDENTIFIABILITY DEGREE OF DYNAMIC SYSTEM PARAMETERS

Neusypin Konstantin Avenirovich – D.Sc. (Eng.), Professor, Bauman Moscow State Technical University. Moscow, Russia. E-mail: neysipin@mail.ru.

Proletarsky Andrey Viktorovich – D.Sc. (Eng.), Professor, Bauman Moscow State Technical University. Moscow, Russia.

Kuznetsov Igor Aleksandrovich – Postgraduate Student, Bauman Moscow State Technical University. Moscow, Russia.

Abstract. This article analyzes approaches to a problem of determining the identifiability degree of linear dynamic system parameters. The authors studied original criteria for calculation of the identifiability degree of specific parameters of a dynamic object model applying a scalar approach. Efficiency of criteria for the identifiability degree was demonstrated by analyzing the quality of identification of the gravitational acceleration in error models of an aircraft inertial navigation system.

Keywords: Dynamic object model, identifiability, quality of identification, criterion of the identifiability degree.

References

1. Balonin N.A. *Teoremy identifitsiruemosti* [Theorems of identifiability]. Saint Petersburg: Politekhnika, 2010, 48 p.
2. Balakrishnan A.V. *Teoriya fil'tratsii Kalmana* [Kalman filtering theory]. Transl. from Eng. Moscow: Mir, 1988, 168 p.
3. Ayvazyan S.A., Enyukov I.S., Meshalkin L.D. *Prikladnaya statistika: Issledovanie zavisimostej. pod red. S. A. Ajvazyana* [Applied Statistics: Research of dependency: Reference book. Edited by S.A. Ayvazyan]. Moscow: Finance and Statistics, 1985, 487 p.
4. Salychev O.S. *Skalyarnoe otsenivanie mnogomernykh dinamicheskikh sistem* [The scalar evaluation of multidimensional dynamical systems]. Moscow: Mechanical Engineering, 1987, 216 p.
5. Neusypin K.A., Proletarsky A.V., Kuznetsov I.A. The synthesis of a numerical criterion of the identifiability degree of model parameters. *Avtomatizatsiya. Sovremennye tekhnologii* [Automation. Modern technologies]. 2015, no. 3, pp. 9-13.

Неусыпин К.А., Пролетарский А.В., Кузнецов И.А. Исследование степени идентифицируемости параметров динамических систем // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. 2015. №2. С. 85–89.

Neusypin K.A., Proletarsky A.V., Kuznetsov I.A. Research on an identifiability degree of dynamic system parameters. *Vestnik Magnitogorskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta im. G.I. Nosova* [Vestnik of Nosov Magnitogorsk State Technical University]. 2015, no. 2, pp. 85–89.